Complément sur la formule $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant n)$

Pour commencer, précisons les hypothèses pour que la formule soit valide : on prend une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Une démonstration a été vue en TD. Ci-dessous, je vous en présente une autre. Par ailleurs, en cliquant ici, vous accéderez à une vidéo expliquant intuitivement cette formule.

Démonstration. On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) \quad \text{en intervertissant les sommes : } \sum_{k} \sum_{n \leqslant k} \text{ devient } \sum_{k} \sum_{n \geqslant k} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geqslant k).
\end{aligned}$$

□

L'interversion de sommes (infinies) est légitime car les termes sont positifs. Il convient de bien gérer les bornes dans les sommes. Cela peut être traité comme suit, en introduisant Δ l'ensembles des couples d'entiers (k, n) vérifiant $1 \leqslant n \leqslant k$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{k} \mathbb{P}(X = k) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\Delta}(k, n)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\Delta}(k, n)\mathbb{P}(X = k) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}(X = k).
\end{aligned}$$