Quelques points essentiels sur l'espérance conditionnelle

On se donne X une variable aléatoire positive définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ et $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$. L'enjeu est de savoir manipuler $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$.

Si vous vous dites "oulalah, ça fait peur les tribus", à terme, idéalement, il conviendra de dépasser cela. Mais en pratique, dans pas mal de situations, vous pouvez vous en sortir et tout reformuler en termes de variables aléatoires : je vais vous expliquer cela.

Exemples fondamentaux

1. $\mathscr{G}_1 = \sigma(Z)$ pour une variable aléatoire réelle Z,
2. $\mathscr{G}_2 = \sigma(Z_1, \ldots, Z_n)$ pour des variables aléatoires $Z_1, \ldots, Z_n$.

Premier truc à avoir en tête : $\mathbb{E}[X]$ est un *nombre*, alors que $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}]$ est une *variable aléatoire.*

Si on écrit $\mathbb{E}[X \mid Z]$, cela signifie tout simplement $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}_1]$ avec $\mathscr{G}_1$ qui désigne le premier exemple fondamental ci-dessus. En particulier, $\mathbb{E}[X \mid Z]$ est une variable aléatoire.

Si on écrit $\mathbb{E}[X \mid Z_1, \ldots, Z_n]$, cela signifie tout simplement $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}_2]$ avec $\mathscr{G}_2$ qui désigne le premier exemple fondamental ci-dessus. En particulier, $\mathbb{E}[X \mid Z_1, \ldots, Z_n]$ est une variable aléatoire.

Nous serons amenés à parler de variables aléatoires $\mathscr{G}$-mesurables. Si cela vous effraie un peu, sachez dans le cas des exemples fondamentaux, c'est quelque chose de plus concret :

1. X est $\mathscr{G}_1$-mesurable si et seulement si on peut écrire X sous la forme $X = h(Z)$ pour une certaine fonction h (mesurable, si on veut être précis),
2. X est $\mathscr{G}_2$-mesurable si et seulement si on peut écrire X sous la forme $X = h(Z_1, \ldots, Z_n)$ pour une certaine fonction h (mesurable, si on veut être précis),

Enfin, la notion d'indépendance se comporte comme on le pense :

1. X est indépendante de $\mathscr{G}_1$ si et seulement si X est indépendante de Z,
2. X est indépendante de $\mathscr{G}_2$ si et seulement si X est indépendante de $(Z_1, \ldots, Z_n)$.

À partir de là, les résultats de la page suivante deviennent applicables en pratique. Il ne me reste plus qu'à énoncer ces résultats : c'est parti !

Propriétés-clés

1. Linéarité de l'espérance conditionnelle.
2. Pour toute constante c, on a $\mathbb{E}[c \mid \mathscr{G}] = c$.
3. Si X est $\mathscr{G}$-mesurable, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = X$.
4. Si X est indépendante de $\mathscr{G}$, alors $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{G}] = \mathbb{E}[X]$.
5. Si X est $\mathscr{G}$-mesurable et Y est positive, alors $\mathbb{E}[XY \mid \mathscr{G}] = X\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{G}]$.

Voici un exemple d'application typique : on a X et Z deux variables positives indépendantes et on veut calculer $\mathbb{E}[XZ^3 \mid Z]$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[XZ^3 \mid Z] &= Z^3\mathbb{E}[X \mid Z] \quad \text{d'après la règle 5 car } Z^3 \text{ est } \sigma(Z)\text{-mesurable} \\
&= Z^3\mathbb{E}[X] \quad \text{d'après la règle 3 car } X \text{ est indépendante de } Z
\end{aligned}$$