Lemme de Slutsky
Correction du 0.18, question 1

Il s'agit de montrer que la fonction caractéristique $\varphi_{(X_n,Y_n)}$ converge simplement vers la fonction caractéristique $\varphi_{(X,c)}$.

Soit $(s,t)\in\mathbf{R}^2$. On a

$$\left|\varphi_{(X_n,Y_n)}(s,t)-\varphi_{(X,c)}(s,t)\right| \leqslant \underbrace{\left|\varphi_{(X_n,Y_n)}(s,t)-\varphi_{(X_n,c)}(s,t)\right|}_{\text{Ⓐ}} + \underbrace{\left|\varphi_{(X_n,c)}(s,t)-\varphi_{(X,c)}(s,t)\right|}_{\text{Ⓑ}}.$$

Commençons par gérer Ⓑ.

$$\begin{aligned}
\text{Ⓑ} &= \left|\varphi_{(X_n,c)}(s,t)-\varphi_{(X,c)}(s,t)\right| \\
&= \left|\mathbf{E}\left(e^{isX_n+itc}\right)-\mathbf{E}\left(e^{isX+itc}\right)\right| \\
&= \left|\mathbf{E}\left(e^{itc}e^{isX_n}\right)-\mathbf{E}\left(e^{itc}e^{isX}\right)\right| \\
&= \left|e^{itc}\,\mathbf{E}\left(e^{isX_n}\right)-e^{itc}\,\mathbf{E}\left(e^{isX}\right)\right| && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&= \left|e^{itc}\right|\cdot\left|\mathbf{E}\left(e^{isX_n}\right)-\mathbf{E}\left(e^{isX}\right)\right| \\
&= 1\cdot\left|\varphi_{X_n}(s)-\varphi_X(s)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 && \text{car } X_n \text{ converge en loi vers } X
\end{aligned}$$

Passons à Ⓐ. Du fait que e^{isX_n} n'est pas un simple scalaire, contrairement à e^{itc}, la manipulation sera plus subtile. Prêter attention aux lignes marquées d'une étoile, où le calcul prend une forme bien différente de ce que nous avons fait pour Ⓐ.

$$\begin{aligned}
\text{Ⓐ} &= \left|\varphi_{(X_n,Y_n)}(s,t)-\varphi_{(X_n,c)}(s,t)\right| \\
&= \left|\mathbf{E}\left(e^{isX_n+itY_n}\right)-\mathbf{E}\left(e^{isX_n+itc}\right)\right| \\
&= \left|\mathbf{E}\left(e^{isX_n}e^{itY_n}\right)-\mathbf{E}\left(e^{isX_n}e^{itc}\right)\right| \\
&\overset{\star}{=} \left|\mathbf{E}\left(e^{isX_n}\left(e^{itY_n}-e^{itc}\right)\right)\right| && \text{par linéarité de l'espérance} \\
&\overset{\star}{\leqslant} \mathbf{E}\left(\left|e^{isX_n}\left(e^{itY_n}-e^{itc}\right)\right|\right) \\
&\leqslant \mathbf{E}\left(\left|e^{isX_n}\right|\cdot\left|e^{itY_n}-e^{itc}\right|\right) \\
&\leqslant \mathbf{E}\left(1\cdot\left|e^{itY_n}-e^{itc}\right|\right)=\mathbf{E}\left(\left|e^{itY_n}-e^{itc}\right|\right)
\end{aligned}$$

Montrons que la borne obtenue pour Ⓐ, à savoir $\mathbf{E}\left(\left|e^{itY_n}-e^{itc}\right|\right)$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini.

Attention, cela ne peut pas se faire en utilisant simplement $\mathbf{E}\left(e^{itY_n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\mathbf{E}\left(e^{itc}\right)$. En effet, les valeurs absolues ne sont pas au bon endroit pour cela — nous avons été forcés de les rentrer à l'intérieur de l'espérance lors de l'inégalité affublée d'une étoile. Aussi, on va devoir recourrir à une autre caractérisation ou définition de la convergence en loi.

On introduit la fonction continue bornée $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ définie par $f:y\mapsto\left|e^{ity}-e^{itc}\right|$. Comme Y_n converge en loi vers Y, la quantité $\mathbf{E}\left(\left|e^{itY_n}-e^{itc}\right|\right)=E\left(f\left(Y_n\right)\right)$ converge vers $\mathbf{E}\left(f(c)\right)$ quand n tend vers l'infini. Or on a $\mathbf{E}\left(f(c)\right)=\mathbf{E}\left(\left|e^{itc}-e^{itc}\right|\right)=\mathbf{E}(0)=0$.

Par conséquent, chacun des termes Ⓐ et Ⓑ intervenant dans la majoration de $\left|\varphi_{(X_n,Y_n)}(s,t)-\varphi_{(X,c)}(s,t)\right|$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. On en déduit la convergence simple de $\varphi_{(X_n,Y_n)}$ vers $\varphi_{(X,c)}$. *Ainsi, (X_n,Y_n) converge bien en loi vers (X,c).*