

UNE INITIATION PAS À PAS À LA THÉORIE DES CATÉGORIES AVEC UN REGARD TOURNÉ VERS LES APPLICATIONS

Sébastien Martineau
smartineau@lpsm.paris

En mathématiques, nous sommes habitués à considérer des objets et des morphismes entre ces objets. Il peut s'agir d'espaces vectoriels, de groupes, d'ensembles, d'espaces topologiques, etc.¹ Pour démontrer des résultats, il s'agit alors d'inspecter en détail nos objets d'étude. La théorie des catégories incarne un tout autre point de vue, moderne et fécond : pour bien comprendre un objet, on ne l'inspecte pas en détail ; on étudie plutôt comment il interagit avec tous les objets possibles (on regarde la collection de tous les morphismes partant de cet objet ou allant vers cet objet).

La théorie des catégories se prête naturellement à une présentation en termes algébriques, abstraits et généraux, avec un regard tourné vers la géométrie algébrique, la topologie algébrique ou la logique. Dans ce TER, on propose une approche assez différente. Au lieu de sauter rapidement vers des abstractions générales, on procèdera de façon progressive. On inspectera en détail un certain nombre de situations concrètes et la généralité de notre propos s'étendra graduellement. En particulier, les catégories elles-mêmes ne seront pas étudiées dès le début du TER. Par ailleurs, les constructions seront présentées avec un regard tourné vers des applications extra-mathématiques, telles que la gestion de ressources ou les bases de données. Aucun prérequis n'est demandé concernant ces domaines d'application potentiels.

Références :

- *Applied Category Theory Course*, de John Baez.
- *Seven Sketches in Compositionality: An Invitation to Applied Category Theory*, de Brendan Fong et David Spivak.
- *La Théorie des Ensembles selon les Shadoks*, d'Alain Prouté.
- Discussions régulières avec Sébastien Martineau.

1. Pour les ensembles, les morphismes sont les fonctions. Pour les espaces topologiques, ce sont les fonctions continues.

MATHÉMATIQUES ET CRISE ENVIRONNEMENTALE

Sébastien Martineau
smartineau@lpsm.paris

La situation actuelle de la biosphère est préoccupante, avec des extinctions massives, une pollution à grande échelle, ainsi qu'une évolution climatique rapide. Il s'agit dans ce TER de se renseigner sur cette situation et d'en aborder un ou plusieurs aspects de façon mathématique.

Plus précisément, la première moitié du semestre sera dédiée à rassembler informations et compréhension concernant la situation actuelle. Durant cette phase, le but sera d'aller vers ce qu'on considérera comme essentiel, sans se préoccuper de voir les choses à tout prix sous un angle mathématique.

Durant la seconde moitié, on sélectionnera, parmi les aspects rencontrés jusqu'alors, un ou plusieurs points qui se prêtent à une étude mathématique de niveau M1 et mènera une telle étude. Cette procédure en deux temps a pour but de vraiment garder en tête le sujet d'étude et d'y employer les mathématiques comme outils de compréhension.

PERCOLATION SUR LE RÉSEAU CARRÉ

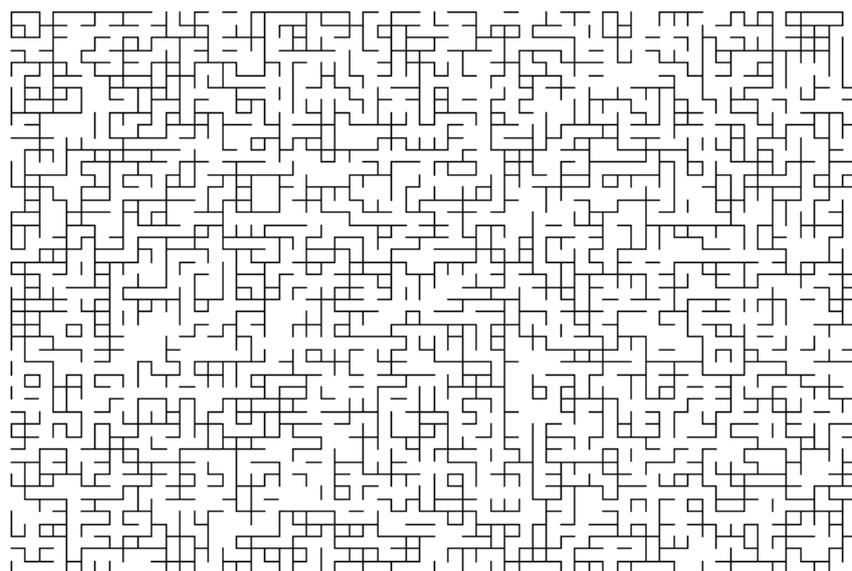
Sébastien Martineau

sebastien.martineau@sorbonne-universite.fr

On pourrait présenter ce sujet de TER de façon concise en s'en tenant aux questions et au dessin ci-dessous.

Que peut-on dire de la géométrie du dessin aléatoire suivant ?

Quelle tête ont les composantes connexes ?



La recette pour obtenir ce dessin est toute simple : on part du réseau carré et, pour chaque arête, on tire indépendamment à pile ou face pour décider si on la conserve ou si on l'efface. Une des grandes conjectures de la théorie des probabilités prédit pour ce dessin un comportement fractal, avec une description exacte du dessin vu de loin faisant intervenir mouvement brownien et analyse complexe.

Nous ne chercherons ni à établir ni même à énoncer cette conjecture. Néanmoins, on sera en mesure de démontrer le résultat suivant : si X désigne la variable aléatoire qui compte le nombre de sommets dans la composante connexe de $(0,0)$, alors X est finie presque sûrement mais d'espérance infinie. On peut interpréter cet énoncé comme une forme faible de « comportement fractal ».

En effet, si l'espérance de X était finie, on pourrait se dire que la bonne échelle pour regarder cette composante est l'échelle des arêtes. Si X valait l'infini avec probabilité non-nulle, on pourrait avancer que la bonne échelle consiste à regarder le dessin depuis infiniment loin. Le fait de n'être dans aucun de ces scénarios suggère en quelque sorte que des choses intéressantes se passent à toutes les échelles. Cela sera d'ailleurs confirmé par les résultats intermédiaires qui serviront à établir que X est finie d'espérance infinie.

La percolation présente un double intérêt mathématique et physique. Mathématiquement, elle est source de problèmes aisés à formuler et stimulants à résoudre, à la croisée de la géométrie discrète et des probabilités, et dont la résolution peut faire appel à des branches variées des mathématiques. Quant à l'aspect physique de la chose, la percolation est intéressante à plusieurs égards.

Tout d'abord, il s'agit d'un des modèles les plus simples présentant un phénomène de transition de phase (de même que l'eau subit des transitions de phase à 0°C et 100°C). Si on utilise une pièce biaisée, de telle sorte que chaque arête est conservée avec probabilité p , on montrera qu'il existe une valeur critique p_c telle que :

- si $p < p_c$, alors X est d'espérance finie,
- si $p > p_c$, alors $\mathbb{P}(X = \infty)$ est non-nulle.

On peut déduire de ce qu'on a montré pour $p = \frac{1}{2}$ que, pour le réseau carré, $p_c = \frac{1}{2}$.

Par ailleurs, la percolation peut servir à modéliser les phénomènes de propagation en milieu poreux : les arêtes conservées peuvent être empruntées, les autres sont condamnées, et on s'intéresse aux chemins qui laissent passer ce dont on étudie la propagation (fluide, maladie, incendie, etc.). Nous n'aborderons pas cet aspect du sujet mais la percolation intéresse aussi beaucoup les physiciens du fait de son lien avec le modèle d'Ising, un modèle à la fois central comme prototype de modèle de physique statistique (le modèle hamiltonien par excellence) et par ce qu'il permet de modéliser (magnétisme, équilibre liquide-vapeur). Enfin, étudier la percolation spécifiquement en dimension 2 permet de développer une théorie riche aboutissant à une compréhension assez fine des phénomènes à l'œuvre, ce qui réjouit aussi bien les mathématiciens que les physiciens théoriciens (la conjecture sur la structure fractale mentionnée plus haut vient en partie des physiciens issus de la théorie conforme des champs).

Les résultats que nous établirons concernant la percolation sur le réseau carré sont connus depuis les années 80 mais ont été récemment remis à l'ordre du jour à la lueur de techniques nouvelles. C'est sur ces approches modernes que se fondera ce TER.

RÉFÉRENCES

- *Crossing probabilities for planar percolation*, Laurin Köhler-Schindler et Vincent Tassion
- *A new proof of the sharpness of the phase transition for Bernoulli percolation on \mathbb{Z}^d* , Hugo Duminil-Copin et Vincent Tassion
- Discussion régulières avec Sébastien Martineau

ALGÈBRE ET THÉORIE DE LA MESURE

BANACH–TARSKI ET AU-DELÀ

Sébastien Martineau

sebastien.martineau@sorbonne-universite.fr

Quand on définit la mesure de Lebesgue, à notre grand désarroi, on ne la définit pas sur toutes les parties de l'espace mais seulement sur les boréliens¹. Peut-on pousser la chose plus loin et définir la mesure de Lebesgue sur absolument *toutes* les parties de l'espace ?

En utilisant l'axiome du choix, on peut montrer que non. Le paradoxe de Vitali dit qu'il n'existe aucune mesure prolongeant celle de Lebesgue à toutes les parties de \mathbb{R}^d de façon invariante par translations. Dès qu'on travaille en dimension $d \geq 3$, on a pire encore : le paradoxe de Banach–Tarski. Il est possible de décomposer la boule unité de \mathbb{R}^d en un nombre fini de morceaux, de les déplacer par des isométries pour arriver en fin de compte à *deux* copies de la boule unité ! La notion de volume est donc problématique même si on ne demande qu'une additivité finie au lieu de la σ -additivité.

On pourrait se dire que le problème vient de l'axiome du choix mais ce n'est pas vraiment le cas. Sans axiome du choix, on n'arrive pas à définir la mesure de Lebesgue sur toutes les parties mais on ne sait pas pourquoi — avec axiome du choix, on démontre des théorèmes contre-intuitifs, lesquels *expliquent* pourquoi on ne *peut pas* définir la mesure de Lebesgue partout. Si on ne peut pas la définir partout avec l'axiome du choix, on le peut encore moins sans cet axiome².

Il semble donc que le volume ne puisse pas être défini sur toutes les parties de \mathbb{R}^d . C'est sans compter la possibilité d'un changement de point de vue ! L'énoncé « tout polynôme a autant de racines que son degré » admet des contre-exemples, comme X^2 ou $X^2 + 1$. Mais les contre-exemples ne disent rien d'autre que « cet énoncé est faux si on l'interprète naïvement » — on peut toujours espérer un cadre plus harmonieux où cet énoncé devient vrai. Pour les polynômes, tel est le cas : il s'agit de compter les racines avec multiplicité et d'introduire les racines complexes.

1. Ou éventuellement les lebesguiens.

2. À moins que la théorie des ensembles avec axiome du choix soit contradictoire mais un théorème dit alors que la théorie des ensembles toute seule serait déjà contradictoire. Or les mathématiciens espèrent bien que la théorie des ensembles tient la route !

Par ailleurs, je précise que quand je dis qu'on ne peut pas définir la mesure de Lebesgue partout sans l'axiome du choix, c'est à comprendre au sens « si je travaille dans la théorie des ensembles usuelle sans axiome du choix ». Je n'exclus aucunement la possibilité de définir la mesure de Lebesgue sur toutes les parties de l'espace en travaillant dans une théorie des ensembles sans axiome du choix mais avec adjonction de certains axiomes « exotiques ». De fait, cela est possible mais ce n'est pas du tout la direction envisagée dans ce TER.

Eh bien la situation est analogue pour le problème de la mesure. La théorie des lieux (ou locales), un point de vue algébrique sur la topologie, apporte une solution positive au problème de la mesure. Les sous-lieux de \mathbb{R}^d sont des parties généralisées et on peut mesurer harmonieusement³ tous les sous-lieux (donc toutes les parties) de \mathbb{R}^d .

Les paradoxes de Vitali et de Banach–Tarski ne contredisent pas le paragraphe précédent car un sous-lieu ne contenant aucun point peut néanmoins être non-vide — une nouveauté par rapport aux ensembles classiques ! La résolution du conflit vient alors de ce que les partitions de Vitali et de Banach–Tarski ne sont pas des partitions du point de vue des lieux : dans chaque partition de ce type, on pourra trouver des blocs qui s’intersectent le long d’un lieu qui, quoique sans point, est non-vide — *et tellement non-vide qu’on doit lui attribuer une masse strictement positive*. Il y a de la masse « entre les points », dans la « glue topologique qui tient les points ensemble ».

Le paradoxe de Banach–Tarski s’explique par la structure « compliquée » du groupe $SO(d)$ pour $d \geq 3$. Étudier cette structure s’avère très fructueux et amène naturellement des concepts féconds de théorie des groupes : il ne s’agit pas d’un simple contre-exemple, d’une pathologie. Le point de vue des lieux, quant à lui, propose de « généraliser la topologie générale » avec une approche algébrique du sujet. Au lieu de mimer $(\mathbb{Z}, +, \times)$ en introduisant les anneaux, on essaiera plutôt de mimer $(\text{Ouvrts}(X), \cap, \cup)$ en introduisant une certaine classe d’ensembles ordonnés — les fameux « lieux »...

RÉFÉRENCES PRINCIPALES

- *Measure, randomness and sublocales*, Alex Simpson
- *There is a free group \mathbf{F}_2 in $SO(3)$* , Mario Carneiro
- Discussion régulières avec Sébastien Martineau

RÉFÉRENCES ANNEXES (totalement facultatives)

- *Les paradoxes de Hausdorff–Banach–Tarski*, Denis Choimet
- *Mesurer toutes les parties de \mathbb{R}^n* , Sébastien Martineau
- *La Théorie des Ensembles selon les Shadoks*, Alain Prouté
- *Théorie de la mesure dans les lieux réguliers ou : Les intersections cachées dans le paradoxe de Banach–Tarski*, Olivier Leroy

3. Il existe en fait même deux façons de faire. Il se trouve que les ensembles pour lesquels ces deux mesures coïncident sont précisément les lebesguiens.

CONSTANTE DE CONNECTIVITÉ DU RÉSEAU HEXAGONAL

Sébastien Martineau

Considérons le réseau hexagonal : combien peut-on tracer de chemins issus de l'origine et de longueur n ? Si on s'intéresse à absolument tous les chemins possibles, la question n'est pas très intéressante : il y en a 3^n . Mais que devient la question si on s'intéresse aux chemins auto-évitants, c'est-à-dire ne passant jamais deux fois par le même sommet ? C'est un exercice instructif de démontrer que le cardinal en question peut s'écrire $\mu^{n+o(n)}$, pour une certaine valeur de μ . La valeur correcte de μ a été prédite par le physicien Nienhuis en 1982, mais ce n'est qu'en 2010 que Duminil-Copin et Smirnov ont établi rigoureusement que $\mu = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$. Inspirée par des techniques à la pointe de la mécanique statistique, la démonstration de ce résultat n'en demeure pas moins élémentaire.

Références :

- *La marche auto-évitante*, de Vincent Beffara.
- *The connective constant of the honeycomb lattice equals $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$* , de Hugo Duminil-Copin et Stanislav Smirnov.