Voici un problème auquel il peut être intéressant de réfléchir. Ce problème permet d'approfondir la compréhension d'une notion extrêmement importante en mathématiques : celle d'image réciproque. En outre, c'est l'occasion d'aborder la théorie des ensembles sous un angle assez algébrique. Au lieu de travailler par exemple avec $\mathbb{R}$ qui a les opérations $+$ et $\times$ et les éléments neutres 0 et 1, on va travailler avec l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X donné, qui est muni de $\bigcup$ et $\bigcap$.

Les terminologies de morphisme introduites dans ce document ne sont pas standards. Les indications sont écrites en mode miroir.

Soient X et Y deux ensembles. On dira qu'une fonction $G : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est un *morphisme* si pour tout ensemble I et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a $\bigcup_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $\bigcap_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcap_{i\in I} B_i)$. Noter qu'on a bien choisi de définir G de $\mathscr{P}(Y)$ vers $\mathscr{P}(X)$, pas dans l'autre sens.

On rappelle que si Z est un ensemble et si $(A_i)_{i\in I}$ désigne une famille de parties de Z, la partie $\bigcup_{i\in I} A_i$ est définie comme $\{z \in Z \,:\, \exists i \in I,\, z \in A_i\}$ et $\bigcap_{i\in I} A_i$ comme $\{z \in Z \,:\, \forall i \in I,\, z \in A_i\}$. L'élément neutre pour l'intersection est Z : ajouter Z à une famille de parties de Z ne change pas la valeur de son intersection. L'élément neutre pour l'union est $\varnothing$: ajouter $\varnothing$ à une famille de parties de Z ne change pas la valeur de son union.

En prenant I vide, démontrer que tout morphisme vérifie $G(Y) = X$ et $G(\varnothing) = \varnothing$. Si vous n'y parvenez pas, ce n'est pas grave : dans ce cas, pour la suite de l'exercice, ajoutez ces deux conditions à la définition de morphisme.

Démontrer qu'une fonction $G : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est un morphisme si et seulement s'il existe une fonction $f : X \to Y$ telle que pour toute partie B de Y, on ait $G(B) = f^{-1}(B)$. On rappelle que $f^{-1}(B)$ est défini comme $\{x \in X \,:\, f(x) \in B\}$. Démontrer de plus qu'une telle fonction f est toujours unique. Cela fournit donc une bijection entre les morphismes de $\mathscr{P}(Y)$ vers $\mathscr{P}(X)$ et les fonctions de X vers Y.

On pourra commencer par les parties les moins délicates, à savoir expliquer pourquoi si $G : B \longmapsto f^{-1}(B)$, alors G est un morphisme, ainsi que l'unicité de f. Pour le point restant, on pourra s'intéresser à ce que donne $G(\{y\})$ pour y dans Y.

On dira qu'une fonction $G : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est un *prémorphisme* si pour tout ensemble *fini* I et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a $\bigcup_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcup_{i\in I} B_i)$ et $\bigcap_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcap_{i\in I} B_i)$. Noter qu'on se restreint à des ensembles I qui sont finis. Comme avant, on peut démontrer (ou admettre ou inclure dans la définition) que $G(\varnothing) = \varnothing$ et $G(Y) = X$.

Vérifier que tout morphisme est un prémorphisme. Démontrer que tout prémorphisme est croissant au sens suivant : si on a $B \subset B' \subset Y$, alors on a l'inclusion $G(B) \subset G(B')$. En particulier, tout morphisme vérifie cette propriété. Montrer que tout prémorphisme vérifie que pour tout $B \in \mathscr{P}(Y)$, on a $G(Y \setminus B) = X \setminus G(B)$. En d'autres termes, l'opération « complémentaire » est automatiquement préservée par les prémorphismes donc par les morphismes.

Vérifier que $G : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est un prémorphisme si et seulement si on a toutes propriétés suivantes : $G(Y) = X$; $G(\varnothing) = \varnothing$; pour toutes parties B et B' de Y, on a $G(B \cap B') = G(B) \cap G(B')$ et $G(B \cup B') = G(B) \cup G(B')$.

Trouver un prémorphisme qui n'est pas un morphisme.

Je vous invite à prendre X un singleton et Y un ensemble infini, par exemple l'ensemble des entiers naturels.

On dira qu'une fonction $G : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est un *quasimorphisme* si on a les deux conditions suivantes :

1. pour tout ensemble I et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a l'égalité $\bigcup_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcup_{i\in I} B_i)$,
2. pour tout ensemble *fini* I et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a $\bigcap_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcap_{i\in I} B_i)$.

Ainsi, un quasimorphisme respecte les intersections finies et les unions quelconques. Comme avant, on peut démontrer (ou admettre ou inclure dans la définition) que $G(\varnothing) = \varnothing$ et $G(Y) = X$. La notion de quasimorphisme peut paraître très tordue mais il se trouve qu'elle est naturelle dans certains contextes avancés issus de la topologie (en théorie des frames et locales).

Démontrer que morphismes et quasimorphismes sont la même notion.

Le fait que les morphismes sont des quasimorphismes est facile. Pour l'autre implication, je vous invite à inspecter votre démonstration du fait que tout morphisme est de la forme $B \longmapsto f^{-1}(B)$. Elle devrait s'appliquer également aux quasimorphismes. Comment concluez-vous alors ?

On dira qu'une fonction $G : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est un *pseudomorphisme* si on a les deux conditions suivantes :

1. pour tout ensemble *fini* I et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a $\bigcup_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcup_{i\in I} B_i)$,
2. pour tout ensemble I et toute famille $(B_i)_{i\in I}$ de parties de Y, on a l'égalité $\bigcap_{i\in I} G(B_i) = G(\bigcap_{i\in I} B_i)$.

Cette fois, un pseudomorphisme respecte les unions finies et les intersections quelconques. Comme avant, on peut démontrer (ou admettre ou inclure dans la définition) que $G(\varnothing) = \varnothing$ et $G(Y) = X$.

Montrer que morphismes et pseudomorphismes sont la même notion.

Poser H qui envoie B sur le complémentaire de G du complémentaire de B. Que dire de H ?

N'hésitez pas à vous poser vos propres questions. Par exemple, on a vu que si $f : X \to Y$, alors son application image réciproque $[f^{-1}] : \mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$ est digne d'intérêt. Étant donnés trois ensembles X, Y et Z ainsi que deux fonctions $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$, exprimer $[(g \circ f)^{-1}]$ en termes de $[f^{-1}]$ et $[g^{-1}]$.